Printed Pages – 8

J-176

B.Sc. (Part-I) (Old Course)

Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Analysis and Geometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से 'दो' भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer all the five questions. 'Two' parts from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) दर्शाइये कि सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ एक समतलीय हैं यदि और केवल यदि $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}$ तथा $\vec{c}+\vec{a}$ एक समतलीय है।

Show that the vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ are coplanar if and only if $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}$ and $\vec{c}+\vec{a}$ are coplanar.

(b) यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ अर्थात् $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तो दर्शाइये कि :

$$\text{grad}\, r^n = nr^{n-2}\vec{r}$$

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ or $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, show that :

$$\text{grad}\, r^n = nr^{n-2}\vec{r}$$

(c) सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{curl}\left(\text{curl}\,\vec{F}\right) = \text{grad}\left(\text{div}\,\vec{F}\right) - \nabla^2\vec{F}$$

Show that :

$$\text{curl}\left(\text{curl}\,\vec{F}\right) = \text{grad}\left(\text{div}\,\vec{F}\right) - \nabla^2\vec{F}$$

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ तथा वक्र C, xy-समतल में एक आयन है, जो y = 0, x = a, y = b, x = 0 से घिरा है।

Evaluate $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ and C is the rectangle in the xy-plane bounded by y = 0, x = a, y = b, x = 0.

(b) स्टोक्स प्रमेय को सत्यापित कीजिए, जब

$$\vec{F} = (2x - y)\hat{i} - yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k},$$

जहाँ S, गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का ऊपर का अर्द्ध भाग है तथा C इसकी परिसीमा है।

Verify Stoke's theorem when

$$\vec{F} = (2x - y)\hat{i} - yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k},$$

where S is the upper half of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, bounded by its projection and C is its boundary.

(c) ग्रीन प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Green's theorem.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) निम्नलिखित शांकव का अनुरेखण कीजिए :

$$21x^2 - 6xy + 29y^2 + 6x - 58y - 151 = 0$$

Trace the conic :

$$21x^2 - 6xy + 29y^2 + 6x - 58y - 151 = 0$$

(b) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ और $\frac{\ell}{r} = -1 + e\cos\theta$ एक ही शांकव को निरूपित करते हैं।

Show that the equations $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ and $\frac{\ell}{r} = -1 + e\cos\theta$ represent the same conic.

(c) सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{\ell}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ शांकव $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ को स्पर्श करेगी यदि $(A - e)^2 + B^2 = 1$

Show that the condition that the line $\frac{\ell}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ may touch the conic $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ is $(A - e)^2 + B^2 = 1$.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये, जिसका आधार निम्नलिखित वक्र है, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$.

Find the equation of right circular cylinder whose guiding circle is $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$.

(b) गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $3x + 2y + z + 2 = 0$ को बिन्दु $(1, -2, 1)$ पर स्पर्श करता है और गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ को लाम्बिकतः प्रतिच्छेद करता है।

Find the equation of the sphere which touches the plane $3x + 2y + z + 2 = 0$ at the point $(1, -2, 1)$ and cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ orthogonally.

(c) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक, रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा जिसका निर्देशांक वक्र $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 3$ है।

Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and the guiding curve is the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 3$.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जबकि समतल $\ell x + my + nz = p$ दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ को स्पर्श करता है।

To find the condition when the plane $\ell x + my + nz = p$ touches to the ellipsoid :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(b) निम्न समीकरण का समानयन रूप प्रमाणिक रूप में कीजिए :

$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$

Reduce the equation to the standard form :

$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$

(c) अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ के बिन्दु $(a\cos\alpha, b\sin\alpha, 0)$ से जाने वाले जनकों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equations to the generators of the hyperboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ which pass through the point $(a\cos\alpha, b\sin\alpha, 0)$.

Printed Pages – 8

JN-176

B.Sc. (Part-I) (New Course)

Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Analysis and Geometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से कोई दो भाग को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Attempt any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ और $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ व्युत्क्रम पद्धति के सदिश हों, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}' = \vec{0}$$

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ and $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ are reciprocal system of vectors, then show that :

$$\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}' = \vec{0}$$

(b) यदि $\hat{R}, \vec{r}$ की दिशा में मात्रक सदिश है, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$\hat{R} \times d\hat{R} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^2}$$

If $\hat{R}$ is the unit vector in the direction of $\vec{r}$, then prove that :

$$\hat{R} \times d\hat{R} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^2}$$

(c) दर्शाइये कि :

$$\nabla^2\left(\frac{x}{r^2}\right) = -\frac{2x}{r^4}$$

Show that :

$$\nabla^2\left(\frac{x}{r^2}\right) = -\frac{2x}{r^4}$$

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) $\iint_S \phi \hat{n}\, dS$ का मूल्यांकन करें, जहाँ $\phi = \frac{3}{8}xyz$ तथा S बेलन $x^2 + y^2 = 16$ का पृष्ठ है, जो प्रथम अष्टांक में z = 0 से z = 5 के बीच अन्तर्विष्ट है।

Calculate $\iint_S \phi \hat{n}\, dS$, where $\phi = \frac{3}{8}xyz$ and S is the surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ which lies in the first octant between z = 0 to z = 5.

(b) $\oint_C \left[\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xy\, dy\right]$ समतल के लिए गॉउस प्रमेय सत्यापित करें, जहाँ आयत C, y = 0, x = 0, y = b, x = a से परिबद्ध है।

Verify Green's theorem in the plane for

$$\oint_C \left[\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xy\, dy\right],$$

where C is the rectangle bounded by y = 0, x = 0, y = b, x = a.

P.T.O.

(c) फलन F = $(x^2 + y^2)$ i – 2xyj के लिए स्टोक के प्रमेय को सत्यापित कीजिए जबकि समाकलन को x = ±a, y = 0, y = b के परिबद्ध आयत के परितः किया गया है।

Verify Stoke's theorem for the function F = $(x^2 + y^2)$ i – 2xyj, when the integration is taken along the rectangular bounded by x = ±a, y = 0, y = b.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) शांकव $x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0$ का अनुरेखण कीजिए। इनके अक्षों के समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

Trace the conic $x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0$. Also find the equation of its axes.

(b) दीर्घ-अक्ष पर एक दिये गये बिन्दु से संनाभि शांकवों की एक श्रेणी पर खींचे गये स्पर्श रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

Find the locus of points of contract of tangents to a series of confocals conics from a given point on the major axis.

(c) शांकव $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ के सापेक्ष किसी बिन्दु (r_1, θ_1) के ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the polar of point (r_1, θ_1) w.r.t. the conic :

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$$

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) A, OX पर एक बिन्दु है और B, OY पर ताकि कोण OAB अचर (= α) हो। AB पर व्यास लेकर एक वृत्त खींचा गया है जिसका समतल, OZ के समान्तर है। सिद्ध कीजिए कि ज्यों-ज्यों AB परिवर्तित होता है वृत्त, शांकव $2xy - z^2 \sin 2\alpha = 0$ को जनित करता है।

A is a point on OX and B on OY, so that the angle OAB is constant (= α). On AB as diameter a circle is described whose plane is parallel to OZ. Prove that as AB varies the circle generates to conic $2xy - z^2 \sin 2\alpha = 0$.

(b) सिद्ध कीजिये कि समीकरण $\sqrt{(fx)} + \sqrt{(gy)} + \sqrt{(hz)} = 0$ एक शंकु को निरूपित करता है जो निर्देशांक समतलों को स्पर्श करता है।

Prove that the equation $\sqrt{(fx)} + \sqrt{(gy)} + \sqrt{(hz)} = 0$ represents a cone which touches to co-ordinate planes.

(c) उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष $x = 2y = 3z$ है तथा त्रिज्या 2 है।

Find the equation of the right circular cylinder whose axis is $x = 2y = 3z$ and radius is 2.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) एक दीर्घवृत्तज के तीन संयुग्मी अर्द्ध-व्यासों के सिरे से जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation to the plane through the extremities of three conjugate semi-diameters of an ellipsoid.

(b) दर्शाइये कि पृष्ठ $yz + zx + xy = a^2$ का समतल $\ell x + my + nz = p$ द्वारा प्रतिच्छेद एक परवलय होगा यदि $\sqrt{\ell} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0$·

Show that the section of surface $yz + zx + xy = a^2$ by the plane $\ell x + my + nz = p$ will be a parabola if $\sqrt{\ell} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0$.

(c) समीकरण को प्रामाणिक रूप में समानयन कीजिए :

$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$

Reduce the equation of standard form :

$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2zx - 4xy - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$