

J-175**B.Sc. (Part-I) (Old Course)****Examination, 2021****MATHEMATICS****Paper - II****(Calculus)****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 50****Minimum Pass Marks : 17**

नोट : प्रत्येक इकाई से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt any two parts from each unit. All questions carry equal marks.

इकाई-I / UNIT-I

Q. 1. (a) ε - δ विधि के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 4x) = 5$$

J-175**P.T.O.****(2)**

By using ε - δ method, prove that :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 4x) = 5$$

(b) यदि $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1 - x^2) y_{n+1} - (2n + 1) x y_n - n^2 y_{n-1} = 0$$

If $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, then prove that :

$$(1 - x^2) y_{n+1} - (2n + 1) x y_n - n^2 y_{n-1} = 0$$

(c) कथन लिखकर, सिद्ध करें : "टेलर प्रमेय"।

State and prove : "Taylor Theorem".

इकाई-II / UNIT-II

Q. 2. (a) वक्र $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 3xy + 3y^2 + x +$

$1 = 0$ की अनन्त-स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

J-175

(3)

Find the asymptotes of the curve :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 3xy + 3y^2 + x + 1 = 0$$

(b) वक्र $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$ का अनुरेखण

कीजिए।

Trace the curve $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$.

(c) यदि $(-1, 2)$ वक्र $f(x) = ax^3 + bx^2$ का नति परिवर्तन

बिन्दु है, तब दर्शाइये कि $a = 1, b = 3$.

If $(-1, 2)$ be the point of inflexion of curve

$f(x) = ax^3 + bx^2$, then show that $a = 1, b = 3$.

J-175

P.T.O.

(4)

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) $\int \frac{dx}{2+3\sin x+4\cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int \frac{dx}{2+3\sin x+4\cos x}$.

(b) $\int_0^{\pi/2} \log \sin(x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int_0^{\pi/2} \log \sin(x) dx$.

(c) एस्ट्रॉइड (Astroid) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का सम्पूर्ण

क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the total area bounded by the astroid

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

J-175

(5)

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) हल कीजिए :

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$$

Solve :

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$$

(b) हल कीजिए :

$$3p^2y^2 - 2xyp + 4y^2 - x^2 = 0$$

Solve :

$$3p^2y^2 - 2xyp + 4y^2 - x^2 = 0$$

(c) हल कीजिए :

$$(D^2 + 4D + 3)y = e^{2x} \sin 3x$$

(6)

Solve :

$$(D^2 + 4D + 3)y = e^{2x} \sin 3x$$

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) हल कीजिए :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x) \frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$$

Solve :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1+x) \frac{dy}{dx} + 2(1+x)y = x^3$$

(b) प्राचल विचरण विधि से हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4 \tan 2x$$

Solve by method of variation of parameters :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4 \tan 2x$$

J-175

P.T.O.

J-175

(7)

(c) हल कीजिए :

$$\frac{x dx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{y-z}$$

Solve :

$$\frac{x dx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{y-z}$$

—————

JN-175
B.Sc. (Part-I) (New Course)
Examination, 2021
MATHEMATICS
Paper - II
(Calculus)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न/इकाई से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question/unit. All questions carry equal marks.

इकाई-I / UNIT-I

Q. 1. (a) यदि $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \sin x}{1+x^{2n}}$ तो समझाइये

कि क्यों फलन अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में कहीं पर भी शून्य

(2)

नहीं होता है, यद्यपि $g(0)$ तथा $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ चिन्हों में भिन्न है।

If $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \sin x}{1+x^{2n}}$ then

explain why this function does not vanish

everywhere in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, although $g(0)$ and

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ differ in sign.

(b) यदि $y = \left[\log \left\{ t + \sqrt{(1+t^2)} \right\} \right]^2$ तब दर्शाइए कि

$$(y_{n+2})_0 + n^2 (y_n)_0 = 0$$

तथा $(y_n)_0$ का मान भी ज्ञात कीजिए।

If $y = \left[\log \left\{ t + \sqrt{(1+t^2)} \right\} \right]^2$, then prove that :

$$(y_{n+2})_0 + n^2 (y_n)_0 = 0$$

Hence find $(y_n)_0$.

(3)

(c) सिद्ध कीजिए कि :

$$(i) \quad g\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = g(x) - \frac{x}{1+x}g'(x) + \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$\frac{g''(x)}{2} - \dots$$

$$(ii) \quad g(mx) = g(x) + (m-1)xg'(x)$$

$$+ \frac{1}{2}(m-1)^2 x^2 g''(x) + \dots$$

$$(iii) \quad g(0) = g(x) - xg'(x) + \frac{x^2}{2}g''(x) - \frac{x^3}{3}$$

$$g'''(x) \dots$$

Prove that :

$$(i) \quad g\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = g(x) - \frac{x}{1+x}g'(x) + \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$\frac{g''(x)}{2} - \dots$$

(4)

$$(ii) \quad g(mx) = g(x) + (m-1)xg'(x)$$

$$+ \frac{1}{2}(m-1)^2 x^2 g''(x) + \dots$$

$$(iii) \quad g(0) = g(x) - xg'(x) + \frac{x^2}{2}g''(x) - \frac{x^3}{3}$$

$$g'''(x) \dots$$

इकाई-II / UNIT-II

Q. 2. (a) सिद्ध कीजिए कि वक्र

$$(x^2 - y^2)(y^2 - 4x^2) + 6x^3 - 5x^2y - 3xy^2 + 2y^3$$

$$- x^2 + 3xy - 1 = 0$$

की अनन्तस्पर्शिया उसे आठ बिन्दुओं में काटती है जो

वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर स्थित है।

Show that the eight points of intersection of

the curve :

$$(x^2 - y^2)(y^2 - 4x^2) + 6x^3 - 5x^2y - 3xy^2 + 2y^3$$

$$- x^2 + 3xy - 1 = 0$$

and its asymptotes lie on circle $x^2 + y^2 = 1$.

(5)

(b) वक्र $y^2 = ax^2 + bx^3$ पर मूल-बिन्दु की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Find the nature of the origin on the curve

$$y^2 = ax^2 + bx^3.$$

(c) वक्र $x = a \cos^3\theta$, $y = b \sin^3\theta$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve :

$$x = a \cos^3\theta, y = b \sin^3\theta$$

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) $\int \cos^m t \sin n t dt$ के लिये समानयन-सूत्र ज्ञात कीजिए।

Find the reduction formula for $\int \cos^m t \sin n t dt$.

(b) वक्र $y^2 (2a - x) = x^3$ का वक्र, इसके अनन्तस्पर्शियों के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area of the curve $y^2 (2a - x) = x^3$ between the area and its asymptotes.

JN-175

P.T.O.

(6)

(c) वक्र $y^2 = \frac{a^2x}{(a-x)}$ को उसके अनन्तस्पर्शी के परितः परिक्रमण कराने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Find the volume of the solid generated by the revolution of the curve $y^2 = \frac{a^2x}{(a-x)}$ about its asymptote.

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) हल कीजिए :

$$\frac{y dy + x dx}{x dy - y dx} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

Solve :

$$\frac{y dy + x dx}{x dy - y dx} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

(b) $xp^2 = (x - a)^2$ का अन्वालोप स्पर्श बिन्दु पथ एवं द्वि-बिन्दु बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जबकि इसका व्यापक हल $9(y + c)^2 = 4x(x - 3a)^2$ है।

JN-175

(7)

Find the envelope, tac-locus and node lows of $xp^2 = (x - a)^2$, while its general solution is $9(y + c)^2 = 4x(x - 3a)^2$.

(c) सिद्ध कीजिए कि :

$$(D - m_1)(D - m_2)y \equiv (D - m_2)(D - m_1)y,$$

जहाँ m_1 तथा m_2 कोई दो अचर हैं।

Prove that :

$$(D - m_1)(D - m_2)y \equiv (D - m_2)(D - m_1)y,$$

where m_1 and m_2 are any two arbitrary constants.

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) रैखिक अवकल समीकरण

$$y'' + py' + ay = R$$

को हल करने की विधि लिखिए जबकि इसका पूरक फलन ज्ञात हो।

Write the method of solving the linear differential equation $y'' + py' + ay = R$ when its complementary function is known.

(8)

(b) हल कीजिए :

$$x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = x^3$$

Solve :

$$x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = x^3$$

(c) निम्न युगपत् समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + 7x - y = 0$$

Solve the system of equations :

$$\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + 7x - y = 0$$