

J-21**B.A. (Part-I) (Old Course)****Examination, 2021****MATHEMATICS****Paper - II****(Calculus)****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 50****Minimum Pass Marks : 17**

नोट : प्रत्येक इकाई से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt any two parts from each unit. All questions carry equal marks.

इकाई-I / UNIT-I

Q. 1. (a) ϵ - δ विधि के प्रयोग से, सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 8} = 3$$

J-21**P.T.O.****(2)**

By using ϵ - δ method, prove that :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 8} = 3$$

(b) यदि $y = \frac{x}{x^2 + a^2}$, तब y_n ज्ञात कीजिए।

If $y = \frac{x}{x^2 + a^2}$, then find y_n .

(c) सिद्ध कीजिए कि :

$$\log_e(1 + e^x) = \log_e 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{192}x^4 + \dots$$

Prove that :

$$\log_e(1 + e^x) = \log_e 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{192}x^4 + \dots$$

इकाई-II / UNIT-II

Q. 2. (a) निम्नलिखित वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y$$

$$- 2x + 1 = 0$$

J-21

(3)

Find the asymptotes of the following curve :

$$y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y$$

$$- 2x + 1 = 0$$

(b) वक्र $r(\theta^2 - 1) = a\theta^2$ के नति-परिवर्तन बिन्दुओं को

ज्ञात कीजिए।

Find the points of inflexion in the curve

$$r(\theta^2 - 1) = a\theta^2.$$

(c) वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $x^3 + y^3 = 3axy$.

(4)

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{a + b\sin x}$$

Find the value of :

$$\int \frac{dx}{a + b\sin x}$$

(b) $\int_0^\pi \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

Find the value of $\int_0^\pi \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$.

(c) दो वक्रों $y^2 = ax$ तथा $x^2 + y^2 = 4ax$ के उभयनिष्ठ

क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

Find the area of the common field of two

curve $y^2 = ax$ and $x^2 + y^2 = 4ax$.

(5)

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) हल कीजिए :

$$(y^2 + 2x^2y) dx + (2x^3 - xy) dy = 0$$

Solve :

$$(y^2 + 2x^2y) dx + (2x^3 - xy) dy = 0$$

(b) हल कीजिए :

$$(D^4 + D^2 + 1)y = ax^2 + be^{-x} \sin 2x$$

Solve :

$$(D^4 + D^2 + 1)y = ax^2 + be^{-x} \sin 2x$$

J-21

P.T.O.

J-21

(6)

(c) हल कीजिए :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = x + \log x$$

Solve :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = x + \log x$$

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) हल कीजिए :

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) - 2x \frac{dy}{dx} + 2y + x^2y = 0$$

Solve :

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) - 2x \frac{dy}{dx} + 2y + x^2y = 0$$

(7)

(b) प्राचल विचरण की विधि से हल कीजिए :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} - (1+x^2)y = x$$

Solve by method of variation of parameters :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} - (1+x^2)y = x$$

(c) हल कीजिए :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{5z + \tan(y-3x)}$$

Solve :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{3} = \frac{dz}{5z + \tan(y-3x)}$$



JN-21**B.A. (Part-I) (New Course)
Examination, 2021****MATHEMATICS****Paper - II****(Calculus)****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 50****Minimum Pass Marks : 17**

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न/इकाई से किन्हीं दो भागों

को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question/unit. All questions carry equal marks.

इकाई-I / Unit-I

Q. 1. (a) किसी फलन की सीमा की अद्वितीयता को दर्शाइये।

Show the uniqueness of limit of function.

JN-21**P.T.O.****JN-21****(2)**

(b) फलन $f(t) = |t - 1| + |t - 2|$ का अन्तराल $[0, 3]$ में ग्राफ खींचिए तथा अन्तराल $[0, 3]$ में फलन $f(t)$ के सांतत्य एवं अवकलनीयता की विवेचना कीजिए।

Draw the graph of :

$$f(t) = |t - 1| + |t - 2|$$

in the interval $[0, 3]$ and discuss the continuity and differentiability of the function

$f(t)$ in this interval.

(c) यदि $y = \frac{(\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$ जहाँ $-1 < x < 1$ तथा $\frac{-\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2}$, तब सिद्ध कीजिए

$$(1 - x^2) y_{n+1} - (2n + 1) x y_n - n^2 y_{n-1} = 0$$

तथा यदि

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

तब सिद्ध कीजिए कि

$$(n - 1) a_{n+1} - n a_{n-1} = 0$$

(3)

अतः प्रसार का व्यापक पद ज्ञात कीजिए तथा प्रसार के प्रथम तीन पदों को ज्ञात कीजिए।

If $y = \frac{(\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$ where $-1 < x < 1$ and $\frac{-\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2}$, then prove that

$$(1 - x^2) y_{n+1} - (2n + 1) x y_n - n^2 y_{n-1} = 0$$

Also if $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

Prove that

$$(n - 1) a_{n+1} - n a_{n-1} = 0$$

hence obtain the general term of the expansion. Find also the first three terms in the expansion.

इकाई-II / Unit-II

Q. 2. (a) परवलय $y^2 = 4ax$ की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

JN-21

P.T.O.

(4)

Find the asymptotes of the parabola

$$y^2 = 4ax.$$

(b) वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके लिये वक्र $r = f(\theta)$ पर खींचे गये वक्रता-वृत्त मूल बिन्दु से होकर जाते हैं।

Find the equation for that the points on the curve $r = f(\theta)$ at which the circle of curvature passes through the origin.

(c) वक्र $x^5 + y^5 - 5a^2 x^2 y = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $x^5 + y^5 - 5a^2 x^2 y = 0$.

इकाई-III / Unit-III

Q. 3. (a) यदि $S_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta} d\theta$

$$V_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin n\theta)^2}{\sin\theta} d\theta$$

जहाँ n पूर्णांक है, दिखाइये कि

JN-21

(5)

$$S_{n+1} - S_n = 0$$

$$V_{n+1} - V_n = S_{n+1}$$

$$\text{If } S_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$V_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin n\theta)^2}{\sin\theta} d\theta$$

where n is an integer, show that :

$$S_{n+1} - S_n = 0$$

$$V_{n+1} - V_n = S_{n+1}$$

(b) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{2a} f(t) dt = \begin{cases} 2 \int_0^a f(t) dt, & \text{यदि } f(2a-t) = f(t) \\ 0, & \text{यदि } f(2a-t) = -f(t) \end{cases}$$

Prove that :

$$\int_0^{2a} f(t) dt = \begin{cases} 2 \int_0^a f(t) dt, & \text{if } f(2a-t) = f(t) \\ 0, & \text{if } f(2a-t) = -f(t) \end{cases}$$

(6)

(c) हृदयाभ $r = a(1 - \cos \theta)$ का परिमाप ज्ञात कीजिए।

Find the perimeter of the cardioid

$$r = a(1 - \cos \theta).$$

इकाई-IV / Unit-IV

Q. 4. (a) हल कीजिए :

$$2x(2x + 3y^2) dy + (3x + 2y^2)y dx = 0$$

Solve :

$$2x(2x + 3y^2) dy + (3x + 2y^2)y dx = 0$$

(b) हल कीजिए :

$$(6x + 2y - 10) dy = (2x + 9y - 20) dx$$

Solve :

$$(6x + 2y - 10) dy = (2x + 9y - 20) dx$$

(c) वक्र-कुल $x^3 - a^3 = 3xy$ के लम्बकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए, a कुल का प्राचल है।

Find the orthogonal trajectories of the family of curves $x^3 - a^3 = 3xy$, where a being parameter of the family.

(7)

इकाई-V / Unit-V

Q. 5. (a) कौशी रैखिक समीकरण को परिभाषित कीजिए तथा

इसे हल करने की विधि का वर्णन कीजिए।

Define Cauchy linear equation and explain

the method of solving this equation.

(b) हल कीजिए :

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{a^2}{x^4}y = 0$$

Solve :

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{a^2}{x^4}y = 0$$

(c) निम्न युगपत् समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dt} = x - y$$

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y$$

(8)

Solve the system of equations :

$$\frac{dy}{dt} = x - y$$

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y$$

