Printed Pages – 7

J-206

B.Sc. (Part-II) (Old Course)

Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Differential Equation)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो भाग हल करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt all the five questions. Two parts from each unit are compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) रैखिक अवकल समीकरण **5**

$$(1+x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

का श्रेणी हल ज्ञात कीजिए।

Find the series solution of the linear differential equation :

$$(1+x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

(b) सिद्ध कीजिए कि : **5**

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\lfloor n}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Prove that :

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\lfloor n}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

(c) सिद्ध कीजिए : **5**

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)}\left[\frac{\sin x}{x}-\cos x\right]$$

Prove that :

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\left(\frac{2}{\pi x}\right)}\left[\frac{\sin x}{x}-\cos x\right]$$

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) मान ज्ञात कीजिए : **5**

$$L\{t\,e^{-t}\sin^2 t\}$$

Evaluate :

$$L\{t\,e^{-t}\sin^2 t\}$$

(b) मान ज्ञात कीजिए : **5**

$$L^{-1}\left\{\frac{2p^2-6p+5}{p^3-6p^2+11p-6}\right\}$$

Evaluate :

$$L^{-1}\left\{\frac{2p^2-6p+5}{p^3-6p^2+11p-6}\right\}$$

(c) हल कीजिए : **5**

$$(D^2 - 3D + 2)\,y = 1 - e^{2t}$$

जबकि $y(0) = 1$ तथा $y'(0) = 0$

Solve :

$$(D^2 - 3D + 2)\,y = 1 - e^{2t}$$

when $y(0) = 1$ and $y'(0) = 0$

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) सम्बन्ध $f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$ से आंशिक अवकल समीकरण की रचना कीजिए। **5**

Formulate partial differential equation from the relation $f(x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$.

(b) हल कीजिए : **5**

$$x^2(y - z)p + y^2(z - x)q = z^2(x - y)$$

Solve :

$$x^2(y - z)p + y^2(z - x)q = z^2(x - y)$$

(c) चार्पिट विधि से हल कीजिए : **5**

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

Solve by Charpit's method :

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) हल कीजिए : **5**

$$p + r + s = 1$$

Solve :

$$p + r + s = 1$$

(b) समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ का वर्गीकरण कीजिए और हल कीजिए। **5**

Classify and solve the equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(c) हल कीजिए : **5**

$$r - 2s + t = \sin(2x + 3y)$$

Solve :

$$r - 2s + t = \sin(2x + 3y)$$

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) फलनक $I[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy)dx$, y(1) = 0, y(2) = –1 के चरममान परीक्षण कीजिए। **5**

Test for extremum the functional :

$$I[y(x)] = \int_1^2 (y'^2 - 2xy)dx,$$

y(1) = 0, y(2) = –1

(b) दीर्घवृत $4x^2 + 9y^2 = 36$ एवं बिन्दु A(1, 0) के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए। **5**

Find the shortest distance between the ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ and point A(1, 0).

(c) फलनक $I[y(x)] = \int_0^1 \left(xy + y^2 - 2y^2y'\right)dx$

$y(0) = 1$, $y(1) = 2$ के चरममान परीक्षण कीजिए। **5**

Test the extremum of the functional :

$$I[y(x)] = \int_0^1 \left(xy + y^2 - 2y^2y'\right)dx$$

$y(0) = 1$, $y(1) = 2$

Printed Pages – 8

JN-206

B.Sc. (Part-II) (New Course)
Examination, 2021
MATHEMATICS
Paper - II
(Differential Equation)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न/इकाई से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question/unit. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) रैखिक अवकल समीकरण

$$y'' - xy' + y = 0$$

का श्रेणी हल ज्ञात कीजिए।

Find the series solution of the linear differential equation :

$$y'' - xy' + y = 0$$

(b) सिद्ध कीजिए कि :

$$Q_n(x) = 2^n \underline{|n} \int_x^{\infty} dx \int_x^{\infty} dx \ldots \int_x^{\infty} \left(x^2 - 1\right)^{-n-1} dx$$

Prove that :

$$Q_n(x) = 2^n \underline{|n} \int_x^{\infty} dx \int_x^{\infty} dx \ldots \int_x^{\infty} \left(x^2 - 1\right)^{-n-1} dx$$

(c) ''किसी स्टर्म ल्यूविल समस्या (Sturm-Liouville problem) के आइगेन फलन एक लाम्बिक समुच्चय निर्मित करते हैं।'' सिद्ध कीजिए।

Prove that the eigen functions of a Sturm-Liouville problem form an arthogonal set.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) लाप्लास रूपांतर के लिये प्रारंभिक मान प्रमेय तथा अंतिम मान प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove that initial value theorem and final value theorem for Laplace transform.

(b) हैवीसाइड प्रसार सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए :

(i) $L^{-1}\left\{\dfrac{2p^2-6p+5}{p^3-6p^2+11p-6}\right\}$

(ii) $L^{-1}\left\{\dfrac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)}\right\}$

Use Heaviside's expansion formula to find :

(i) $L^{-1}\left\{\dfrac{2p^2-6p+5}{p^3-6p^2+11p-6}\right\}$

(ii) $L^{-1}\left\{\dfrac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)}\right\}$

(c) समाकल समीकरण $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2-\int_0^t (t-u)\,f(u)\,du$ को हल कीजिए तथा अपने हल को सत्यापित कीजिए।

Solve the integral equation $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2-\int_0^t (t-u)\,f(u)\,du$ and verify your solution.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$$\left[\frac{(y-z)}{yz}\right]\frac{\partial z}{\partial x}+\left[\frac{(z-x)}{zx}\right]\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x-y)}{xy}$$

Solve the following equation :

$$\left[\frac{(y-z)}{yz}\right]\frac{\partial z}{\partial x}+\left[\frac{(z-x)}{zx}\right]\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x-y)}{xy}$$

(b) निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$z^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]=x^2+y^2$$

Solve the following partial differential equation :

$$z^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]=x^2+y^2$$

(c) चारपिट विधि से निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$q = px + p^2$$

Solve the following differential equation by using the Charpit's method :

$$q = px + p^2$$

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) निम्नांकित आंशिक अवकल समीकरण का वर्गीकरण कीजिए तथा विहित (कैनोनिकल) रूप में समानयन कीजिए :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Classify the following partial differential equation and reduce to canonical form :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

(b) हल कीजिए :

$$(D^2 - D')\ (D - 2D')\ z = e^{2x+y} + xy$$

Solve :

$$(D^2 - D^1)\ (D - 2D^1)\ z = e^{2x+y} + xy$$

(c) मोन्जे विधि से हल कीजिए :

$$t - r\ \sec^4 y = 2q\ \tan y$$

Solve by Monge's method :

$$t - r\ \sec^4 y = 2q\ \tan y$$

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) फलनक $I[y(x)] = \int_0^{\log 2} \left(e^{-x}y'^2 - e^x y^2\right)dx$ के चरम (extremals) ज्ञात करने की समस्या में निर्देशांक रूपान्तरण के अंतर्गत ऑयलर समीकरण की निश्चितता (Invariance of Euler's equation) का सत्यापन कीजिए।

Verify invariance of Euler's equation under co-ordinates transformation in the problem of finding the extremals of the functional :

$$I[y(x)] = \int_0^{\log 2} \left(e^{-x}y'^2 - e^x y^2\right)dx$$

(b) प्रदेश $y \le x^2$ में स्थित बिन्दु A (–2, 3) से बिन्दु B (2, 3) तक का लघुत्तम (न्यूनतम) पथ ज्ञात कीजिए।

Find the shortest path from the point A (–2, 3) to the point B (2, 3) located in the region $y \le x^2$.

(c) फलनक $I[y(x)] = \int_0^{\pi/4} \left(y'^2 - y^2\right)dx$ के चरम को परिसीमा प्रतिबंधों $y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए।

Determine the extremals of the functional :

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/4} \left(y'^2 - y^2\right)dx$$

subject to the boundary condition

$$y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$