

J-205**B.Sc. (Part-II) (Old Course)****Examination, 2021****MATHEMATICS****Paper - I****(Advanced Calculus)****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 50****Minimum Pass Marks : 17**

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Solve any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई-I / UNIT-I

Q. 1. (a) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ जहाँ

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \text{ अभिसारी है।}$$

J-205**P.T.O.****J-205****(2)**

Prove that the sequence $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ where

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \text{ is convergent.}$$

(b) निम्न श्रेणी की अभिसारिता या अपसारिता का परीक्षण

कीजिए :

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \dots + \frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 1)}x^n + \dots$$

$$x > 0$$

Test the convergence or divergence of the

following series :

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \dots + \frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 1)}x^n + \dots$$

$$x > 0$$

(c) सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n} \right]^{1/n} = \frac{4}{e}$$

(3)

Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n} \right]^{1/n} = \frac{4}{e}$$

इकाई-II / UNIT-II

Q. 2. (a) सिद्ध कीजिये कि यदि फलन f किसी बंद अंतराल $[a, b]$

में संतत है तो इस अंतराल में f परिबद्ध भी होगा।

Prove that if function f is continuous in the closed interval $[a, b]$, then f is bounded in this interval.

(b) प्रथम माध्यमान प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिये।

State & prove first mean value theorem.

(c) सिद्ध कीजिए :

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} = F''(x+\theta h)$$

जहाँ θ , -1 और 1 के बीच विद्यमान है।

J-205

P.T.O.

(4)

Prove that :

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} = F''(x+\theta h)$$

where θ lies between -1 & 1 .

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) माना $f(x, y) = 0$, यदि x परिमेय है

= 1, यदि x अपरिमेय है

दिखाइये कि किसी बिंदु (a, b) के लिये

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

Let $f(x, y) = 0$, if x is rational

= 1, if x is irrational

Show that for any point (a, b) , $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$

does not exist.

J-205

(5)

(b) यदि $x^x y^y z^z = c$ तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - (x \log_e x)^{-1} \text{ जब } x = y = z.$$

If $x^x y^y z^z = c$, then prove that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - (x \log_e x)^{-1} \text{ when } x = y = z.$$

(c) $\sin xy$ का $(x - 1)$ और $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$ की घातों में द्वितीय घात तक प्रसार कीजिये।

Expand $\sin xy$ in powers of $(x - 1)$ & $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$

upto second degree term.

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का अन्वलोप ज्ञात कीजिये जब

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ तथा } c \text{ अचर है।}$$

Find the envelope of the straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

when $a^2 + b^2 = c^2$ and c is a constant.

(6)

(b) फलन $u = \sin x \sin y \sin(x + y)$ का उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिये।

Find the maxima and minima of function $u = \sin x \sin y \sin(x + y)$.

(c) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation to the evolute of the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) सिद्ध कीजिये कि :

$$B(m, n) = \frac{\sqrt{m} \sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$$

$$m, n > 0$$

Prove that :

$$B(m, n) = \frac{\sqrt{m} \sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$$

$$m, n > 0$$

(7)

(b) मूल्यांकन कीजिये :

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y + 2z) dx dy dz$$

Evaluate :

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y + 2z) dx dy dz$$

(c) $\int_0^{a \cos \alpha} \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dx dy$ के समाकल का

क्रम परिवर्तित कीजिये और परिणाम की सत्यता की

जाँच कीजिये जब $f(x, y) = 1$

Change the order of integration in

$$\int_0^{a \cos \alpha} \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dx dy$$

and verify the result when $f(x, y) = 1$.



JN-205**B.Sc. (Part-II) (New Course)****Examination, 2021****MATHEMATICS****Paper - I****(Advanced Calculus)****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 50****Minimum Pass Marks : 17**

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Solve any two parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई-I / UNIT-I

Q. 1. (a) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ जहाँ

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \text{ अभिसारी है।}$$

JN-205**P.T.O.****JN-205****(2)**

Prove that the sequence $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ where

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \text{ is convergent.}$$

(b) निम्न श्रेणी की अभिसारिता या अपसारिता का परीक्षण

कीजिए :

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \dots + \frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 1)}x^n + \dots$$

 $x > 0$

Test the convergence or divergence of the

following series :

$$x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \dots + \frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 1)}x^n + \dots$$

 $x > 0$

(c) सिद्ध कीजिए :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n} \right]^{1/n} = \frac{4}{e}$$

(3)

Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n^n} \right]^{1/n} = \frac{4}{e}$$

इकाई-II / UNIT-II

Q. 2. (a) सिद्ध कीजिये कि यदि फलन f किसी बंद अंतराल $[a, b]$

में संतत है तो इस अंतराल में f परिबद्ध भी होगा।

Prove that if function f is continuous in the closed interval $[a, b]$, then f is bounded in this interval.

(b) प्रथम माध्यमान प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिये।

State & prove first mean value theorem.

(c) सिद्ध कीजिए :

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} = F''(x+\theta h)$$

जहाँ θ , -1 और 1 के बीच विद्यमान है।

JN-205

P.T.O.

(4)

Prove that :

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} = F''(x+\theta h)$$

where θ lies between -1 & 1 .

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) माना $f(x, y) = 0$, यदि x परिमेय है

= 1, यदि x अपरिमेय है

दिखाइये कि किसी बिंदु (a, b) के लिये

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

Let $f(x, y) = 0$, if x is rational

= 1, if x is irrational

Show that for any point (a, b) , $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$

does not exist.

JN-205

(5)

(b) यदि $x^x y^y z^z = c$ तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - (x \log_e x)^{-1} \text{ जब } x = y = z.$$

If $x^x y^y z^z = c$, then prove that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - (x \log_e x)^{-1} \text{ when } x = y = z.$$

(c) $\sin xy$ का $(x - 1)$ और $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$ की घातों में द्वितीय घात तक प्रसार कीजिये।

Expand $\sin xy$ in powers of $(x - 1)$ & $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$

upto second degree term.

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये जब

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ तथा } c \text{ अचर है।}$$

Find the envelope of the straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

when $a^2 + b^2 = c^2$ and c is a constant.

(6)

(b) फलन $u = \sin x \sin y \sin(x + y)$ का उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिये।

Find the maxima and minima of function $u = \sin x \sin y \sin(x + y)$.

(c) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation to the evolute of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) सिद्ध कीजिये कि :

$$B(m, n) = \frac{\sqrt{m} \sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$$

$$m, n > 0$$

Prove that :

$$B(m, n) = \frac{\sqrt{m} \sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$$

$$m, n > 0$$

(7)

(b) मूल्यांकन कीजिये :

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y + 2z) dx dy dz$$

Evaluate :

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y + 2z) dx dy dz$$

(c) $\int_0^{a \cos \alpha} \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dx dy$ के समाकल का

क्रम परिवर्तित कीजिये और परिणाम की सत्यता की

जाँच कीजिये जब $f(x, y) = 1$

Change the order of integration in

$$\int_0^{a \cos \alpha} \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dx dy$$

and verify the result when $f(x, y) = 1$.

