

J-69**B.A. (Part-II) (Old Course)****Examination, 2021****MATHEMATICS****Paper - I****(Advanced Calculus)****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 50****Minimum Pass Marks : 17**

नोट : प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Two parts from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I / UNIT-I**Q. 1. (a) मान ज्ञात कीजिए :** **5**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{1/n}$$

Find the value :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{1/n}$$

J-69**P.T.O.****(2)**(b) सिद्ध कीजिए कि : **5**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\ln n)^{1/n}} = e$$

Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\ln n)^{1/n}} = e$$

(c) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए : **5**

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \cdots, x > 0$$

Test the convergence of the following series :

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \cdots, x > 0$$

इकाई-II / UNIT-II**Q. 2. (a) दिखाइए कि फलन :** **5**

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

 $x = 0$ पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।**J-69**

(3)

Show that the function :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$ but not differentiable.

(b) कौशी के माध्यमान प्रमेय को लिखिए और सिद्ध

कीजिए। 5

Write and prove Cauchy mean value theorem.

(c) यदि $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$ तब θ का

मान ज्ञात कीजिए जबकि $x \rightarrow 1$ पर $f(x) =$

$(1 - x)^{5/2}$ 5

If $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$ then find the

value of θ when $f(x) = (1 - x)^{5/2}$ on $x \rightarrow 1$.

J-69

P.T.O.

(4)

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) यदि $x = e^u + e^{-v}$ एवं $y = e^{-u} - e^v$ हो तो सिद्ध

कीजिए कि : 5

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

If $x = e^u + e^{-v}$ and $y = e^{-u} - e^v$ then prove that :

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

(b) यूलर का प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए। 5

Write and prove Euler's theorem.

(c) यदि $V = f(r)$ जहाँ $r^2 = x^2 + y^2$ तो दर्शाइए कि : 5

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

If $V = f(r)$ where $r^2 = x^2 + y^2$ then prove that :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

J-69

(5)

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए। 5

Find the evolute of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(b) निम्नलिखित का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए : 5

$$u = \sin x + \sin y + \sin (x + y)$$

Find the maximum or minimum value of the following :

$$u = \sin x + \sin y + \sin (x + y)$$

(c) $x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जबकि : 5

$$ax + by + cz = p$$

Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$, when :

$$ax + by + cz = p$$

J-69

P.T.O.

(6)

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ जहाँ } m > 0, n > 0$$

Prove that :

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ where } m > 0, n > 0$$

(b) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Prove that :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

J-69

(7)

(c) मान ज्ञात कीजिए :

5

$$\int_1^3 \int_{1/x}^1 \int_0^{\sqrt{xy}} xyz \, dz \, dy \, dx$$

Find the value :

$$\int_1^3 \int_{1/x}^1 \int_0^{\sqrt{xy}} xyz \, dz \, dy \, dx$$

JN-69**B.A. (Part-II) (New Course)****Examination, 2021****MATHEMATICS****Paper - I****(Advanced Calculus)****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 50****Minimum Pass Marks : 17**

नोट : प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Two parts from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I / UNIT-I**Q. 1. (a) मान ज्ञात कीजिए :** **5**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{1/n}$$

Find the value :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{1/n}$$

JN-69**P.T.O.****(2)**(b) सिद्ध कीजिए कि : **5**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\ln)^{1/n}} = e$$

Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\ln)^{1/n}} = e$$

(c) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए : **5**

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \cdots, x > 0$$

Test the convergence of the following series :

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \cdots, x > 0$$

इकाई-II / UNIT-II**Q. 2. (a) दिखाइए कि फलन :** **5**

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

 $x = 0$ पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।**JN-69**

(3)

Show that the function :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$ but not differentiable.

(b) कौशी के माध्यमान प्रमेय को लिखिए और सिद्ध

कीजिए। 5

Write and prove Cauchy mean value theorem.

(c) यदि $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$ तब θ का

मान ज्ञात कीजिए जबकि $x \rightarrow 1$ पर $f(x) =$

$(1 - x)^{5/2}$ 5

If $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(\theta x)$ then find the

value of θ when $f(x) = (1 - x)^{5/2}$ on $x \rightarrow 1$.

(4)

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) यदि $x = e^u + e^{-v}$ एवं $y = e^{-u} - e^v$ हो तो सिद्ध

कीजिए कि : 5

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

If $x = e^u + e^{-v}$ and $y = e^{-u} - e^v$ then prove that :

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

(b) यूलर का प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए। 5

Write and prove Euler's theorem.

(c) यदि $V = f(r)$ जहाँ $r^2 = x^2 + y^2$ तो दर्शाइए कि : 5

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

If $V = f(r)$ where $r^2 = x^2 + y^2$ then prove that :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

(5)

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए। 5

Find the evolute of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(b) निम्नलिखित का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए : 5

$$u = \sin x + \sin y + \sin (x + y)$$

Find the maximum or minimum value of the following :

$$u = \sin x + \sin y + \sin (x + y)$$

(c) $x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जबकि : 5

$$ax + by + cz = p$$

Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$, when :

$$ax + by + cz = p$$

JN-69

P.T.O.

(6)

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ जहाँ } m > 0, n > 0$$

Prove that :

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ where } m > 0, n > 0$$

(b) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Prove that :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

JN-69

(7)

(c) मान ज्ञात कीजिए :

5

$$\int_1^3 \int_{1/x}^1 \int_0^{\sqrt{xy}} xyz \, dz \, dy \, dx$$

Find the value :

$$\int_1^3 \int_{1/x}^1 \int_0^{\sqrt{xy}} xyz \, dz \, dy \, dx$$
