

J-236**B.Sc. (Part-III) Examination, 2021****MATHEMATICS****Paper - I****(Analysis)****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 50****Minimum Pass Marks : 17**

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के कोई दो भाग हल करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Attempt any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई-I / Unit-I

- Q. 1.** (a) डिरिख्ले परीक्षण को लिखिये व सिद्ध कीजिये।
State & prove Dirichlet's test.
- (b) दो चरों के लिये यंग प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।
State & prove Young's theorem for two variables.

J-236**P.T.O.****(2)**

(c) निम्नलिखित आवर्ती फलन $f(x)$ की फूरियर श्रेणी ज्ञात

कीजिये :

$$f(x) = 0, \quad -\pi < x < 0 \text{ के लिये}$$

$$x, \quad 0 \leq x < \pi \text{ के लिये}$$

Find the Fourier series of the periodic function

$f(x)$ where :

$$f(x) = 0, \quad \text{for } -\pi < x < 0$$

$$x, \quad \text{for } 0 \leq x \leq \pi$$

इकाई-II / Unit-II

- Q. 2.** (a) यदि $f \in R [a, b]$ तथा यदि m, M अंतराल $[a, b]$

में f के परिबंध हैं तो सिद्ध कीजिये कि :

$$(i) \text{ यदि } a \leq b \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$(ii) \text{ यदि } a \geq b \Rightarrow m(b-a) \geq \int_a^b f(x) dx \geq M(b-a)$$

J-236

(3)

If $f \in R[a, b]$ and let m, M be Bounds of f on

$[a, b]$. Then prove that :

(i) If $a \leq b \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

(ii) If $a \geq b \Rightarrow m(b-a) \geq \int_a^b f(x) dx \geq M(b-a)$

(b) बीटा फलन $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिये।

Discuss the convergence of Beta function

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx.$$

(c) सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक संतत फलन रीमान

समाकलनीय होता है।

Prove that every continuous function is

Riemann integrable.

(4)

इकाई-III / Unit-III

Q. 3. (a) यदि $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ तथा

$f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ का एक विश्लेषिक फलन

है, तब $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

If $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ & $f(z) =$

$u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$,

then find $f(z)$ in terms of z .

(b) दर्शाइये कि रूपान्तरण $w = \frac{2z+3}{z-4}$, वृत्त $x^2 + y^2 -$

$4x = 0$ को सरल रेखा $4u + 3 = 0$ पर प्रतिचित्रित

करता है।

Show that the transformation $w = \frac{2z+3}{z-4}$,

maps the circle $x^2 + y^2 - 4x = 0$ onto the

straight line $4u + 3 = 0$.

(5)

(c) मोबियस रूपान्तरण ज्ञात कीजिये जो 0, 1 तथा ∞

को क्रमशः 1, i, -1 पर प्रतिचित्रित करता है।

Find the Mobius transformation that maps 0,

1 & ∞ into 1, i & -1 respectively.

इकाई-IV / Unit-IV

Q. 4. (a) माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है एक प्रतिचित्रण d^*

इस प्रकार परिभाषित है कि $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

$\forall x, y \in X$ तब दिखाइये कि d^* , X पर एक दूरीक है।

Let (X, d) be a metric space. A mapping

d^* is defined such that $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

$\forall x, y \in X$ then show that d^* is a metric on X .

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में विवृत्त

समुच्चयों के स्वेच्छ संग्रह का संघ विवृत्त होता है।

(6)

Prove that in a metric space, the union of an

arbitrary collection of open sets is open.

(c) यदि $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ तब सिद्ध कीजिए

कि :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

If $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ then prove that :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

इकाई-V / Unit-V

Q. 5. (a) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में दो संहत

उपसमुच्चयों का संघ, संहत होता है।

Prove that in metric space, union of two

compact subset is compact.

(b) बेयर संवर्ग प्रमेय को लिखिये व सिद्ध कीजिये।

State & prove Baire's category theorem.

(7)

(c) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि का एक संहत

उपसमुच्चय संवृत्त और परिबद्ध होता है।

Prove that in a metric space, every compact

subset is closed and bounded.

■■■■■