Printed Pages – 7

J-112

B.A. (Part-III) (Old Course) Examination, 2021

MATHEMATICS

Paper - II

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : प्रत्येक प्रश्न के किन्हीं दो भागों को हल कीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Solve any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई - I / Unit - I

Q. 1. (a) सिद्ध कीजिए कि अभाज्य घातांक कोटि का एक समूह अवश्य ही एक अतुच्छ केन्द्र रखता है।

Prove that a group of prime order must always have a non-trivial center.

(b) प्रथम सिलो प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove that first Sylow's theorem.

(c) माना G_1 और G_2 कोई दो समूह हैं तब सिद्ध कीजिए कि $G_1 \times \{e_2\}$ और $\{e_1\} \times G_2$ समूह $G_1 \times G_2$ के प्रसामान्य उपसमूह हैं तथा क्रमशः G_1 और G_2 के तुल्यकारी हैं।

Let G_1, G_2 be any two groups. Then prove $G_1 \times \{e_2\}$ and $\{e_1\} \times G_2$ are the normal subgroup of $G_1 \times G_2$ isomorphic to G_1 and G_2 respectively.

इकाई - II / Unit - II

Q. 2. (a) सिद्ध कीजिये कि एक क्रम-विनिमय वलय का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब एक क्रम-विनिमय वलय होता हैं।

Prove that every homomorphic image of a commutative ring is a commutative ring.

(b) वलयों की समाकारिता के लिए मूलभूत प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State and prove that the fundamental theorem on homomorphism of rings.

(c) सिद्ध कीजिए कि एक R - मॉड्यूल M के दो उप मॉड्यूलों का सर्वनिष्ठ भी M का एक उप मॉड्यूल होता है।

Prove that the intersection of two submodules of an R-module M is also a submodule of M.

इकाई - III / Unit - III

Q. 3. (a) किसी परिमित विमिय सदिश समष्टि के आधार का अस्तित्व प्रमेय लिखकर, सिद्ध करें।

State and prove that existence theorem for the basis of a finite dimensional vector space.

(b) यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमिय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हैं, तब दर्शाइये कि :

$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

If W_1 and W_2 are two vector subspaces of finite dimension vector space V(F), then show that :

$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

(c) दर्शाइये कि समुच्चय

$S = \{a+ib, c+id\}, C(R)$ का आधार समुच्चय है यदि और केवल यदि $ad - bc \neq 0$

Show that the set

$S = \{a+ib, c+id\}$ is a basis of C(R) if and only if $ad - bc \neq 0$.

इकाई - IV / Unit - IV

Q. 4. (a) यदि $f : V_3(F) \to V_2(F)$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x, y, z) = (y, z)$$

तब दिखाइये कि f एक रैखिक रूपांतरण है।

If $f : V_3(F) \to V_2(F)$ is defined as $f(x, y, z) = (y, z)$

then show that f is linear.

(b) दर्शाइये कि आव्यूह A अविकर्णीय है :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Show that the matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) सिद्ध कीजिए कि दो रैखिक रूपान्तरणों का गुणनफल भी एक रैखिक रूपान्तरण होता है।

Prove that the product of two linear transformations is again a linear transformation.

इकाई - V / Unit - V

Q. 5. (a) माना V(C) इकाई अंतराल $0 \le x \le 1$ पर सभी सतत् सम्मिश्र मानक फलनों का सदिश समष्टि हैं। यदि $f(x), g(x) \in V(C)$ तथा $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$ तब सिद्ध कीजिए कि V आंतर-गुणन समष्टि है।

Let V(C) be the vector space of all continuous complex-valued functions on unit interval $0 \le x \le 1$. If $f(x), g(x) \in V(C)$ and

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

then prove that V(C) is inner-product space.

(b) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक आंतर गुणन समष्टि एक मानकित सदिश समष्टि है।

Prove that every inner product space is standard vector space.

(c) यदि W एक परिमित विमिय आन्तरगुणन समष्टि V(F) का कोई उपसमष्टि हो, तब सिद्ध कीजिए :

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

जहाँ $W^{\perp}$, W का लाम्बिक पूरक है।

Let W be any subspace of a finite dimensional inner product space V. Then show that :

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

where $W^{\perp}$ is orthogonal complement of W.