Printed Pages – 8

I-22

B.A. (Part-I) Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Analysis and Geometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Solve any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / Unit-I

Q. 1. (a) सिद्ध कीजिए कि :

$$[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] = 2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$$

Prove that :

$$[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] = 2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$$

(b) सिद्ध कीजिए कि :

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

Prove that :

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

(c) फलन ϕ = xyz का बिन्दु P(1, 1, 1) पर दिशीय अवकलन, $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ की दिशा में ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of function ϕ = xyz at a point P(1, 1, 1) in the direction of $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$.

इकाई–II / Unit-II

Q. 2. (a) $\int_C \vec{F}.\vec{dr}$ का मूल्यांकन कीजिए जहाँ $\vec{F} = x^2y^2\,\hat{i}+y\,\hat{j}$ और C, $y^2 = 4x$, का xy-समतल में (0, 0) से (4, 4) तक चाप है।

Evaluate $\int_C \vec{F}.\vec{dr}$ where $\vec{F} = x^2y^2\,\hat{i} + y\,\hat{j}$ and C is the arc of curve $y^2 = 4x$ in xy plane from (0, 0) to (4, 4).

(b) गॉस के डाइवर्जेन्स प्रमेय का प्रयोग करके दर्शाइये कि :

$$\int_S\int \left[\left(x^3 - yz\right)\hat{i} - 2x^2y\,\hat{j} + 2\hat{k}\right]\cdot\hat{n}\,ds = \frac{a^5}{3}$$

जहाँ S, समतल x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a द्वारा परिबद्ध घन का पृष्ठ है।

By using gauss-divergence theorem, show that :

$$\int_S\int \left[\left(x^3 - yz\right)\hat{i} - 2x^2y\,\hat{j} + 2\hat{k}\right]\cdot\hat{n}\,ds = \frac{a^5}{3}$$

where S is the surface of cube bounded by the plane x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a.

(c) ग्रीन प्रमेय से

$$\int_C \left(\cos x \sin y - y\right)dx + \sin x \cos y\, dy$$

का मान ज्ञात कीजिये जहाँ C, वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ का चाप है।

By using Green theorem, find the value of integral

$$\int_C \left(\cos x \sin y - y\right)dx + \sin x \cos y\, dy$$

where C is the arc of circle $x^2 + y^2 = 1$.

इकाई–III / Unit-III

Q. 3. (a) निम्न शांकव का अनुरेखण कीजिये :

$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$

Trace the following conic :

$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$

(b) एक वृत्त, एक आयताकार अतिपरवलय $xy = 1$ को $(x_r, y_r) : r = 1, 2, 3, 4$ पर काटता है। तो सिद्ध कीजिये कि $x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$

A circle intersects rectangular hyperbola $xy = 1$ at $(x_r, y_r) : r = 1, 2, 3, 4$ then prove that $x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$.

(c) यदि PSP', शांकव $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ की नाभिगत जीवा है तो सिद्ध कीजिये कि :

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{\ell}$$

If PSP' is the confocal chord of conic $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ then prove that :

$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{\ell}$$

इकाई–IV / Unit-IV

Q. 4. (a) वह बिन्दु ज्ञात कीजिये जहाँ (2, 1, 3) और (4, –2, 5) को मिलाने वाली रेखा, समतल $2x + y – z = 3$ को काटती है।

Find the point where the line joining the points (2, 1, 3) & (4, –2, 5), intersect $2x + y – z = 3$.

(b) उस लम्बवृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका शीर्ष बिन्दु (1, 1, 1) और अक्ष $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ रेखा है तथा अर्धशीर्ष कोण 30° है।

Find the equation of right circular cone whose vertex is (1, 1, 1), axis is $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ & semi verticle angle is 30°.

(c) उस लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी त्रिज्या 2 है तथा अक्ष $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}$ है।

Find the equation of right circular cylinder whose radius is 2 & axis is $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}$.

इकाई–V / Unit-V

Q. 5. (a) बिन्दु (1, –1, 2) पर शांकवज $5x^2 - 4y^2 + 6z^2 = 25$ के स्पर्श तल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation of tangent plane of $5x^2 - 4y^2 + 6z^2 = 25$ at a point (1, –1, 2).

(b) सरल रेखा $7x + 10y = 30, 5y - 3z = 0$ से होकर जाने वाले, दीर्घवृत्तज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ के स्पर्श तलों के समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equations of tangent plane of ellipsoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ passing through lines $7x + 10y = 30, 5y - 3z = 0$.

(c) सिद्ध कीजिये कि किसी दिये गये बिन्दु से संकेन्द्र शांकवज पर छः अभिलंब खींचे जा सकते हैं।

Prove that there are six normal can be drawn on central conicoids from any given points.