

I-69**B.A. (Part-II) Examination, 2020****MATHEMATICS****Paper - I****(Advanced Calculus)****Time Allowed : Three Hours****Maximum Marks : 50****Minimum Pass Marks : 17**

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई-I / UNIT-I

- Q. 1.** (a) सिद्ध कीजिए कि, यदि किसी अनुक्रम की सीमा का अस्तित्व है, तब वह अद्वितीय होती है। **5**
- Prove that, if the limit of a sequence exists, then it is unique.

I-69**P.T.O.****(2)**

- (b) ज्ञात कीजिये कि निम्नलिखित श्रेणी

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{7} + \dots, x > 0$$

अभिसारी है या अपसारी ? **5**

Find whether the following series is convergent or divergent :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{7} + \dots, x > 0$$

- (c) दर्शाइए कि :
- 5**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^n}{n!} = 0$$

Show that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^n}{n!} = 0$$

इकाई-II / UNIT-II

- Q. 2.** (a) सिद्ध कीजिए कि x के सभी परिमित मानों के लिए $\sin^2 x$ संतत है। **5**

I-69

(3)

Show that $\sin^2 x$ is continuous for all finite values of x .

(b) यदि x और y के प्रत्येक मान के लिए, $f(x + y) = f(x) f(y)$ तथा $f(5) = 2$ और $f'(0) = 3$ तब $f'(5)$ ज्ञात कीजिए।

5

If $f(x + y) = f(x) f(y)$ for all values of x and y .

Also $f(5) = 2$ and $f'(0) = 3$ then $f'(5)$.

(c) अन्तराल $[-1, 1]$ में x^2 के लिए रोले प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

5

Verify Rolle's theorem in the interval $[-1, 1]$

for the function.

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) सिद्ध कीजिये कि $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ विद्यमान नहीं है।

5

Prove that $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ does not exist.

(4)

(b) यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, तब सिद्ध

कीजिये कि :

5

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$

If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then prove

that :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x+y+z}$$

(c) सिद्ध कीजिये कि :

5

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

या $JJ' = 1$

Prove that :

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

or $JJ' = 1$

(5)

इकाई-IV / UNIT-IV

- Q. 4. (a) दी हुई लम्बाई C की सरल रेखा (छड़) का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार फिसलती है कि उसके सिरे दो स्थिर एवं एक दूसरे से समकोण बनाने वाली रेखाओं पर रहते हैं। 5

Find the envelope of a straight line (rod) of given length C which slides with extremities on two fixed straight lines at right angles.

- (b) दर्शाइये कि एक चक्रज का केन्द्रज एक अन्य चक्रज होता है। 5

Show that the evolute of cycloid is another cycloid.

- (c) $U = x^2 + y^2 + z^2$ का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात कीजिये, जहाँ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 5

Find the maxima and minima of $U = x^2 + y^2 + z^2$, where $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

I-69

P.T.O.

(6)

इकाई-V / UNIT-V

- Q. 5. (a) सिद्ध करें : 5

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

- (b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r \sin \theta d\theta dr$ का मान निकालिये। 5

Evaluate $\int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r \sin \theta d\theta dr$.

- (c) निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन समाकलन के क्रम

को बदलकर कीजिये : 5

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x dy dx}{x^2 + y^2}$$

I-69

(7)

Evaluate the following integral by changing

the order of integration :

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x \, dy \, dx}{x^2 + y^2}$$

