Printed Pages – 8

I-20

B.A. (Part-I) Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra and Trigonometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt all the five questions. One question from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) प्रारंभिक रूपान्तरण से आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिये।

With the help of elementary transformation, find the inverse of A where :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) निम्न आव्यूह की जाति तथा रिक्तिता ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Find rank and nullity of the following matrix :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Q. 2. (a) सिद्ध कीजिए कि किसी हर्मिटीयन आव्यूह के अभिलाक्षणिक मान वास्तविक होते हैं।

Prove that eigen value of Hermitian matrix is real.

(b) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह के अभिलाक्षणिक मूलों का मापांक 1 होता है।

Prove that the eigen value of a unitary matrix are of unit modulus.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 3. (a) कैली-हैमिल्टन प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिये।

Write and prove Cayley-Hamilton theorem.

(b) आव्यूह विधि से निम्न समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

Solve the following equations by using matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

Q. 4. (a) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मान एवं संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

Find Eigen value and corresponding Eigen vectors of matrix $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.

(b) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक समीकरणों को ज्ञात करों और सत्यापित करो कि यह A द्वारा सन्तुष्ठ होते हैं और A^{-1} भी ज्ञात करो।

Find the characteristic equation of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

इकाई–III / UNIT-III

Q. 5. (a) यदि समीकरण $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ के मूल गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो सिद्ध कीजिए कि : $p^3r = q^3$

If the roots of the equation $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ are in G.P. then prove that : $p^3r = q^3$.

(b) समीकरण $9x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ को कार्डन विधि से हल कीजिए।

Solve the equation $9x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ by Carden method.

Q. 6. (a) समीकरण $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ को दकार्ते विधि से हल कीजिए।

Solve the equation $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$ by Descarte's method.

(b) यदि α, β, γ समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0, r \neq 0$ के मूल हैं तब वह समीकरण प्राप्त कीजिए जिसके मूल $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$ हैं।

If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, $r \neq 0$ then find the equation whose roots are $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 7. (a) समाकारिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए।

Write and prove fundamental theorem of homomorphism.

(b) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ उपवलय होता है।

Prove that the intersection of two subrings is subring.

Q. 8. (a) लग्रांज प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिये।

Write and prove Lagrange's theorem.

(b) Q^+ सभी धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय है। माना Q^+ में $*$ द्विआधारी संक्रिया निम्नलिखित प्रकार परिभाषित है :

$$a * b = \frac{ab}{2} \ \forall \ a.b \in Q^+$$

दिखाइये कि $(Q^+, *)$ एक आबेली समूह है।

Q^+ is the set of all positive rational numbers and let the binary operation $*$ defined as follows in Q^+ :

$$a * b = \frac{ab}{2} \ \forall \ a.b \in Q^+$$

Prove that $(Q^+, *)$ is an abelian group.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 9. (a) द-मायवर प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए।

Write and prove De-Moivre's theorem.

(b) सिद्ध कीजिए :

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5} = \sin 9\theta - i\cos 9\theta$$

Prove that :

$$\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^4}{(\sin\theta + i\cos\theta)^5} = \sin 9\theta - i\cos 9\theta$$

Q. 10. (a) सिद्ध कीजिए :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}\right)+1} . \cos\frac{n\pi}{4}$$

Prove that :

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\left(\frac{n}{2}\right)+1} . \cos\frac{n\pi}{4}$$

(b) यदि $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta,$ तो सिद्ध कीजिए

कि $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2\cos n\theta$

तथा $x^4 - \frac{1}{x^4} = 2i\sin n\theta$

If $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta,$ then prove that $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2\cos n\theta$ and

$x^4 - \frac{1}{x^4} = 2i\sin n\theta$